PLUS1 関数と図形②

1. (1) 2　(2) $y=\frac{1}{2}x^2$

(3) $y=\frac{1}{2}x^2-8x+32$

2. (1) $\frac{1}{4}x^2$

(2) $-\frac{3}{4}x^2+12x-36$

(3) $2\sqrt{6}$, $8+2\sqrt{2}$

3. (1) $s=\frac{1}{4}t^2$　(2) $s=t-1$

(3) $s=-\frac{1}{4}t^2+t+3$

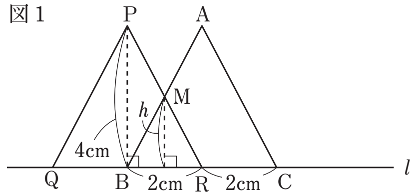
(4) $\frac{11}{4}$, 5

解説

1. (1) $x=2$のとき，点Rは$1\times2=2$より，2cm動いている。よって，△PQRは図1のように，点Rが辺BCの中点の位置にある。辺PRと辺ABとの交点をMとすると，∠ACB＝∠PRQよりAC//PRとなるから，△MBR∽△ABCで，相似比は，BR：BC＝2：4＝1：2　これより，△MBRの高さを$h$cmとすると，△ABCの高さが4cmであることから，h：4＝1：2より，$h=2$

したがって，△MBRの面積は，$\frac{1}{2}\times2\times2=2$(cm²)となり，$x=2$のとき，$y=2$

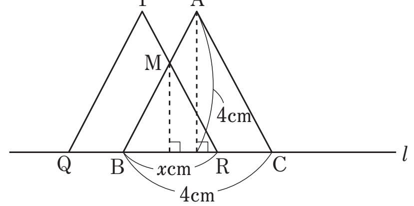
図1



(2) $0\leqq x\leqq4$のとき，△PQRは△ABCと図2のような位置で重なっており，△MBR∽△ABCとなる。△ABCは，底辺が4cm，高さが4cmであることから，底辺と高さが等しい二等辺三角形なので，△MBRも底辺BRと高さが等しい二等辺三角形である。

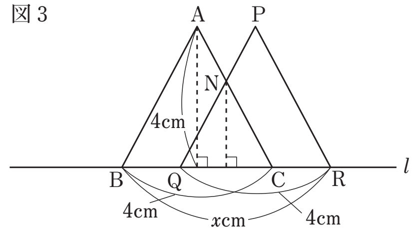
よって，重なった部分△MBRの面積yは，BR＝xより，$y=\frac{1}{2}\times x\times x=\frac{1}{2}x^2$

図2



(3) $4\leqq x\leqq8$のとき，△PQRは△ABCと図3のような位置で重なっており，辺ACと辺PQとの交点をNとすると，△NQCも底辺QCと高さが等しい二等辺三角形である。よって，QC＝BC－BQ＝$4-(x-4)=8-x$より，$y=\frac{1}{2}\times(8-x)\times(8-x)=\frac{1}{2}x^2-8x+32$

図3



2. (1) 図1のように，2点M，Nを定める。T′は直角二等辺三角形だから，∠MA′N＝45°　これと∠MNA′＝90°より，△MA′Nは直角二等辺三角形だから，MN＝NA′　同様に△MANにおいて，MN＝NAより，MN＝NA′

$=\mathrm{NA}=\frac{1}{2}\mathrm{A'A}=\frac{1}{2}x$　よって，$\triangle\mathrm{MA'A}=\frac{1}{2}\times x\times\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x^2$

⑵　図２のように，２点P，P′を定め，〔五角形MP′BB′P〕＝△MA′A－△P′A′B－△PAB′と考える。△P′A′Bは直角二等辺三角形より，BA′＝P′B＝$x-6$　よって，$\triangle\mathrm{P'A'B}=\frac{1}{2}\times(x-6)\times(x-6)=\frac{1}{2}(x-6)^2$　また，△PAB′≡△P′A′Bであり，⑴より，$\triangle\mathrm{MA'A}=\frac{1}{4}x^2$だから，〔五角形MP′BB′P〕$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}(x-6)^2\times2=-\frac{3}{4}x^2+12x-36$

⑶　⑴より，$0\leqq x\leqq6$ のとき，TとT′が重なる部分の面積が６となるのは，$\frac{1}{4}x^2=6$，$x=\pm2\sqrt{6}$ より，$x=2\sqrt{6}$　また，⑵より，$6\leqq x\leqq12$ のとき，TとT′が重なる部分の面積が６となるのは，$-\frac{3}{4}x^2+12x-36=6$，$x=8\pm2\sqrt{2}$ より，$x=8+2\sqrt{2}$　よって，求める x の値は，$2\sqrt{6}$ と $8+2\sqrt{2}$

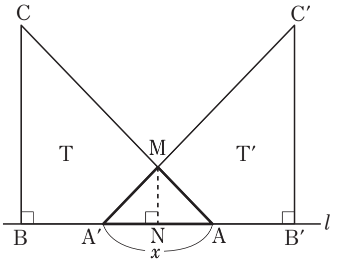
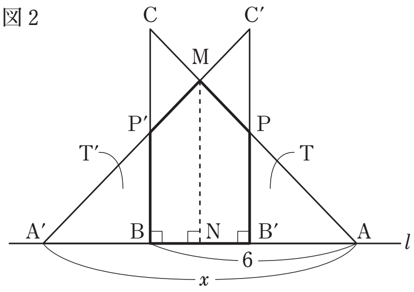
図１


図２


３．⑴　正方形KLMNは毎秒１の速さで移動するから，t 秒後，AM＝OL＝$1\times t=t$ となる。$0\leqq t\leqq2$ のとき，$0\leqq\mathrm{AM}\leqq2$ だから，図１のように，辺ACとMNの交点をPとすると，正方形KLMNと△ABCの重なった部分は直角三角形AMPになる。直線ACの傾きは，$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{2}{6-2}=\frac{1}{2}$ だから，$\mathrm{PM}=\frac{1}{2}\mathrm{AM}=\frac{1}{2}t$ と表される。

よって，$s=\frac{1}{2}\times t\times\frac{1}{2}t=\frac{1}{4}t^2$

⑵　⑴と同様に，AM＝OL＝t であり，$2\leqq t\leqq4$ のとき，$2\leqq\mathrm{OL}\leqq4$ だから，図２のように，辺ACとKLの交点をQとすると，重なった部分は台形QLMPになる。直線ACの傾きが $\frac{1}{2}$ より，$\mathrm{QL}=\frac{1}{2}\mathrm{AL}=\frac{1}{2}(t-2)$，$\mathrm{PM}=\frac{1}{2}\mathrm{AM}=\frac{1}{2}t$ と表される。よって，$s=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{2}(t-2)+\frac{1}{2}t\right\}\times2=t-1$

⑶　⑴と同様に，OL＝t であり，$4\leqq t\leqq6$ のとき，$4\leqq\mathrm{OL}\leqq6$ だから，図３のように，重なった部分は台形QLBCになる。LB＝$6-t$，直線ACの傾きが $\frac{1}{2}$ より，$\mathrm{QL}=\frac{1}{2}\mathrm{AL}=\frac{1}{2}(t-2)$ と表される。よって，$s=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{2}(t-2)+2\right\}\times(6-t)=-\frac{1}{4}t^2+t+3$

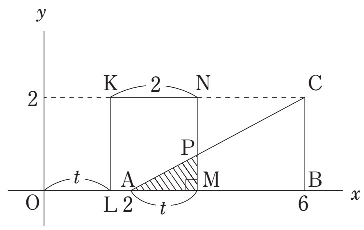
図１


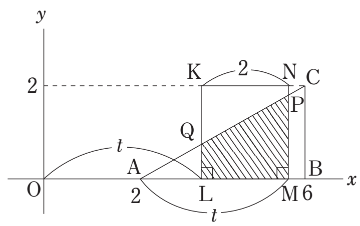
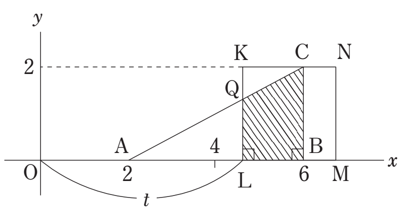
図２


図３


(4)　(1)より，$s=\frac{1}{4}t^2$ に $s=\frac{7}{4}$ を代入すると，$\frac{7}{4}=\frac{1}{4}t^2$ より，$t=\pm\sqrt{7}$　これは $0\leqq t\leqq 2$ を満たさないので適さない。(2)より，$\frac{7}{4}=t-1$　$\therefore t=\frac{11}{4}$　これは $2\leqq t\leqq 4$ を満たすので適する。(3)より，$\frac{7}{4}=-\frac{1}{4}t^2+t+3$，$(t+1)(t-5)=0$　$\therefore t=-1$，5　$4\leqq t\leqq 6$ より，$t=5$　以上より，$t=\frac{11}{4}$，5