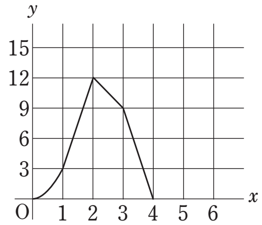
PLUS1 関数と図形①

1. (1) (4, 20)　(2) $y=-4x+36$

(3) 1 秒後, $\dfrac{15}{2}$秒後

2. (1) 時間…$\dfrac{6}{5}$秒後　面積…$\dfrac{108}{25}\mathrm{cm}^2$

(2)



(3) $\sqrt{2}$秒後, $\dfrac{10}{3}$秒後

3. (1) 3　(2) $y=\dfrac{3}{2}x$

(3) $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{75}{2}$

4. (1) $y=x^2$

(2) $y=-6x+72$

解説

1. (1) 図 1 より，△APD の面積は，点 P が辺 AB 上を頂点 A から B まで動く間は増加し，辺 BC 上を頂点 B から C まで動くときと，辺 CD 上を頂点 C から D まで動くときは減少する。よって，図 2 のグラフの点 E は点 P が頂点 B にあるときの x と y の関係を表している。点 P が頂点 B に達するのは頂点 A を出発してから，$8\div2=4$(秒) 後であり，このとき，△APD＝△ABD＝$\dfrac{1}{2}\times8\times5=20$ だから，点 E の座標は (4, 20) である。

図 1

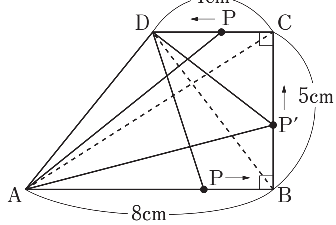
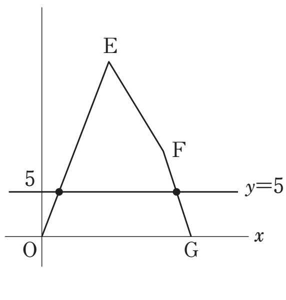


図 2



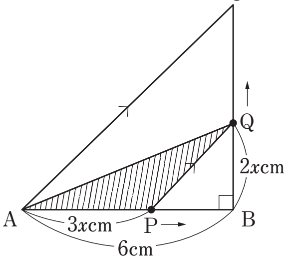
(2) 図 1 から，△AP′D の面積は，〔台形 ABCD〕－△ABP′－△DP′C で求められる。〔台形 ABCD〕＝$\dfrac{1}{2}\times(4+8)\times5=30$　BP′＝(AB＋BP′)－AB＝$2\times x-8=2x-8$，P′C＝(AB＋BC)－(AB＋BP′)＝$(8+5)-2\times x=13-2x$ より，△ABP′＝$\dfrac{1}{2}\times8\times(2x-8)=8x-32$，△DP′C＝$\dfrac{1}{2}\times4\times(13-2x)=26-4x$　よって，△AP′D＝$30-(8x-32)-(26-4x)=-4x+36$ より，$y=-4x+36$

(3) △APD の面積が $5\mathrm{cm}^2$ になるとき，点 P が頂点 A を出発してからの時間は，図 2 のグラフと直線 $y=5$ との交点の x 座標として求められる。点 F は点 P が頂点 C にあるときの x と y の関係を表しているので，x 座標が，$(8+5)\div2=\dfrac{13}{2}$ より，y 座標は，$y=-4\times\dfrac{13}{2}+36=10$　よって，図 2 のように，直線 $y=5$ は線分 OE，FG

と交わる。まず，直線OEは原点Oを通り，傾きは$\frac{20}{4}=5$だから，その式は，$y=5x$　これに$y=5$を代入すると，$5=5x$，$x=1$　次に，点Gは点Pが頂点Dにあることを示しており，点Pが頂点Dに達するのは頂点Aを出発してから，$(8+5+4)\div2=\frac{17}{2}$(秒)後だから，$G\left(\frac{17}{2},\ 0\right)$　これと，$F\left(\frac{13}{2},\ 10\right)$より，直線FGの式は，$y=-5x+\frac{85}{2}$　これに$y=5$を代入して，$5=-5x+\frac{85}{2}$，$x=\frac{15}{2}$　以上より，△APDの面積が5cm²になるのは，点Pが頂点Aを出発してから1秒後と$\frac{15}{2}$秒後

2. (1)　図1で，PQ//ACとなるとき，△PBQはPB＝BQの直角二等辺三角形である。点Pは毎秒3cmの速さで進むから，$AP=3\times x=3x$より，$PB=AB-AP=6-3x$　点Qは毎秒2cmの速さで進むから，$BQ=2\times x=2x$　よって，$6-3x=2x$が成り立ち，これを解くと，$x=\frac{6}{5}$(秒)後　このとき，$AP=3\times\frac{6}{5}=\frac{18}{5}$，$BQ=2\times\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$より，$\triangle APQ=\frac{1}{2}\times\frac{18}{5}\times\frac{12}{5}=\frac{108}{25}$(cm²)

図1



(2)　$6\div3=2$，$6\times2\div3=4$より，点Pは頂点Aを出発してから2秒後に頂点Bに，4秒後に頂点Cに到着する。また，$6\div2=3$より，点Qは頂点Bを出発してから3秒後に頂点Cに到着する。そこで，$0\leqq x\leqq2$，$2\leqq x\leqq3$，$3\leqq x\leqq4$の場合に分けて考える。$0\leqq x\leqq2$のとき，点Pは辺AB上，点Qは辺BC上にあり，△APQは図2の$\triangle AP_1Q_1$のようになる。$AP_1=3x$，$BQ_1=2x$だから，$y=\frac{1}{2}\times3x\times2x$より，$y=3x^2$　$2\leqq x\leqq3$のとき，点Pも点Qも辺BC上にあり，$\triangle AP_2Q_2$のようになる。$P_2Q_2=BQ_2-(AB+BP_2-AB)=2x-(3x-6)=-x+6$だから，$y=\frac{1}{2}\times(-x+6)\times6$より，$y=-3x+18$　$3\leqq x\leqq4$のとき，点Pは辺BC上，点Qは頂点Cにあり，$\triangle AP_3C$のようになる。$P_3C=6+6-3x=-3x+12$だから，$y=\frac{1}{2}\times(-3x+12)\times6$より，$y=-9x+36$　以上より，グラフは解答のようになる。

図2

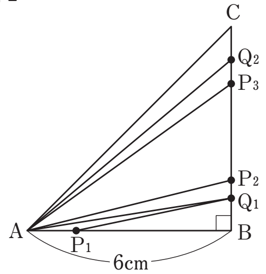
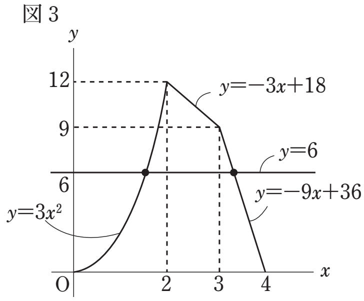
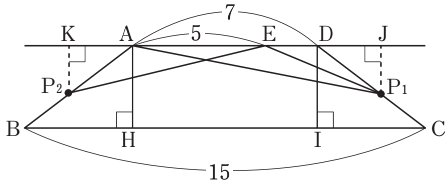


図3



(3)　$\triangle ABC\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{1}{3}=6$であるから，図3のグラフに直線$y=6$をかき込むと，交点が2個できる。それらの$x$座標を求めればよい。まず，放物線$y=3x^2$と直線$y=6$の交点は，$3x^2=6$より，$x=\pm\sqrt{2}$　$0\leqq x\leqq2$より，$x=\sqrt{2}$　次に，直線$y=-9x+36$と直線$y=6$の交点は，$6=-9x+36$より，$x=\frac{10}{3}$　これは$3\leqq x\leqq4$を満たす。したがって，△APQの面積が△ABCの面積の$\frac{1}{3}$になるのは，2点P，Qが出発してから，$\sqrt{2}$秒後と$\frac{10}{3}$秒後

3. (1)　図の△ABHで，三平方の定理より，$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}$　また，台形ABCDはAB＝DC＝5の等脚台形で，点Dから辺BCに垂線DIを引くと，四角形AHIDは長方形となり，△ABH≡△DCIとなる。よって，HI＝AD＝7より，$BH=CI=\frac{1}{2}\times(15-7)=4$　したがって，$AH=\sqrt{5^2-4^2}=3$



(2)　図のように，点Pが辺DC上にあるとき(点P_1とする)，点P_1から辺ADの延長上に垂線P_1Jを引くと，AJ∥BCの錯角より$\angle JDP_1=\angle ICD$であり，$\angle J=\angle I=90^\circ$だから，$\triangle P_1JD\backsim\triangle DIC$である。よって，$P_1J:DI=DP_1:CD$が成り立ち，DI＝AH＝3より，$P_1J:3=x:5$，$P_1J=\frac{3}{5}x$

したがって，$y=\triangle AP_1E=\frac{1}{2}\times5\times\frac{3}{5}x=\frac{3}{2}x$

(3)　図で，点Pが辺AB上にあるとき(点P_2とする)，点P_2から辺ADの延長上に垂線P_2Kを引くと，$\triangle P_2KA\backsim\triangle AHB$より，$P_2K:AH=P_2A:AB$が成り立つ。よって，$P_2A=5+15+5-x=25-x$より，$P_2K:3=(25-x):5$，$P_2K=\frac{3}{5}(25-x)$　したがって，$y=\triangle AP_2E=\frac{1}{2}\times5\times\frac{3}{5}(25-x)=-\frac{3}{2}x+\frac{75}{2}$

4. (1)　2点P，Qは頂点Bを同時に出発し，毎秒1 cmの速さで点Pは辺BC上を往復し，点Qは2辺BF，FG上を移動するから，xの変域が$0\leqq x\leqq6$のとき，図1のように，点Pは辺BC上に，点Qは辺BF上にある。このとき，$BP=1\times x=x$，$BQ=1\times x=x$より，$y=\frac{1}{3}\times\triangle BPQ\times AB=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times x\times x\right)\times6=x^2$より，$y=x^2$と表される。

(2)　$x=6$のとき，点Pは頂点Cに，点Qは頂点Fに到達するから，xの変域が$6\leqq x\leqq12$のとき，図2のように，点Pは辺BC上を頂点Bの方向に移動し，点Qは辺FG上にある。このとき，$PB=6+6-x=12-x$と表され，△BPQの底辺をPBとすると，高さはFB＝6となり一定である。よって，$y=\frac{1}{3}\times\triangle BPQ\times AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(12-x)\times6\times6=-6x+72$より，$y=-6x+72$と表される。

図1

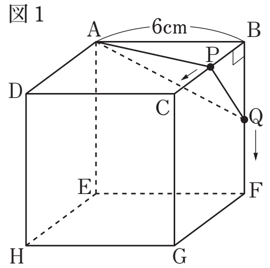


図2