Standard

解答と解説
PART⑨

1. (1)　$6+2\sqrt{3}$ cm　　(2)　$48\sqrt{2}$ cm^3

解説♪　(1)　図１のように，２点ＯとＡ，ＯとＧ，ＯとＨをそれぞれ結び，線分OGと辺AFとの交点をＩとする。△AOGと△FOGはOGについて対称である。また，△AOFは正三角形だから，$\angle\mathrm{AOG}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOF}=\dfrac{1}{2}\times60°=30°$ 同様に，$\angle\mathrm{AOH}=30°$　よって，$\angle\mathrm{GOH}=30°+30°=60°$　さらに，OG＝OHだから，△OGHは正三角形となる。ここで，△AOIは３辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形だから，$\mathrm{OI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$　したがって，$\mathrm{HG}=\mathrm{GO}=\mathrm{GI}+\mathrm{OI}=6+2\sqrt{3}$ (cm)

図１

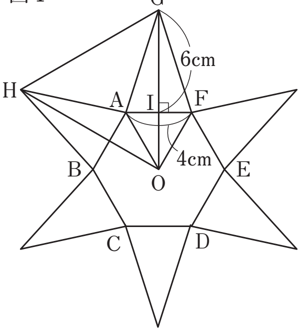
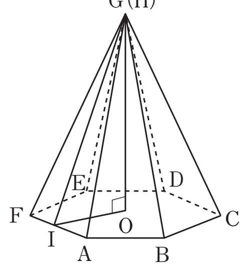


図２



(2)　図２のように，頂点Ｇから底面の正六角形ABCDEFに引いた垂線は点Ｏを通るから，△GIOで三平方の定理より，$\mathrm{GO}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$　また，正六角形ABCDEFは，点Ｏと各頂点を結ぶ線分によって１辺の長さが4cmの正三角形６個に分けられ，その正三角形１個の面積は $\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ だから，底面積は，$4\sqrt{3}\times6=24\sqrt{3}$　よって，正六角錐G-ABCDEFの体積は，$\dfrac{1}{3}\times24\sqrt{3}\times2\sqrt{6}=48\sqrt{2}$ (cm^3)

2. (1)　$3\sqrt{5}$　　(2)　$3\sqrt{13}$　　(3)　8π　　(4)　8π

解説♪　(1)　立方体の表面上において，２点Ｏ，Ｍの距離が最短となる場合として，図１のように，その距離を表す線が辺ADと交わる場合（図１の a）と，辺DCと交わる場合（図１の b）の２通りが考えられる。この２つの場合は図形の対称性より同じなので，辺ADと交わる場合を考える。この場合，２点Ｏ，Ｍの距離を表す線は面ABCDと面ADHE上にあるので，この２つの面を図２のように展開する。図２で，２点Ｏ，Ｍを線分で結んだときのその線分の長さが求める最短距離となる。点Ｏから辺DCに垂線OIを引くと，$\mathrm{OI}=\dfrac{1}{2}\times6=3$，$\mathrm{MI}=\mathrm{MD}+\mathrm{DI}=3+3=6$　よって，求める最短距離は，△OMIで三平方の定理より，$\mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OI}^2+\mathrm{MI}^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

図１

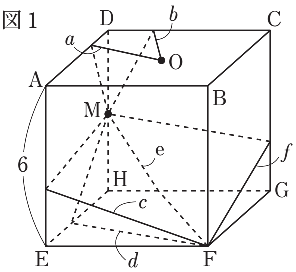
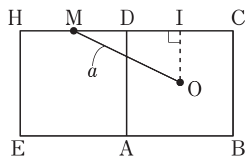


図２



(2)　立方体の表面上において，２点M，Fの距離が最短となる場合として，図１のように，その距離を表す線が辺AE，辺EH，辺HG，辺CGと交わる場合(それぞれ図１の c，d，e，f)が考えられる。ここで，図形の対称性より，辺AE，辺CGと交わる場合と，辺EH，辺HGと交わる場合はそれぞれ同じだから，辺AEと交わる場合，辺EHと交わる場合について調べる。辺AEと交わる場合，図３のような展開図を考え，２点M，Fを線分で結ぶと，その線分の長さは，MH＝3，HF＝6＋6＝12より，MF＝$\sqrt{3^2+12^2}$＝$3\sqrt{17}$　また，辺EHと交わる場合は，図４のような展開図で，MG＝3＋6＝9，FG＝6より，MF＝$\sqrt{9^2+6^2}$＝$3\sqrt{13}$　よって，$3\sqrt{17}>3\sqrt{13}$ より，求める最短距離は $3\sqrt{13}$

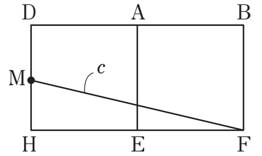
図３


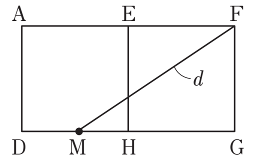
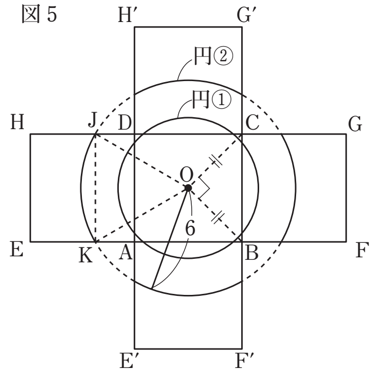
図４


図５


(3)　点Oを含む面ABCDを中心として，図５のような展開図を考える。この展開図上で，点Oを中心として半径４の円の周上に点Pがあれば，２点O，Pの最短距離は４となる。ここで，△OBCが直角二等辺三角形より，OC＝$\frac{1}{\sqrt{2}}$BC＝$\frac{1}{\sqrt{2}}\times 6=3\sqrt{2}$　よって，$3\sqrt{2}>4$ より，OC＞4なので，点Oを中心とした半径４の円は，図５の円①のように展開図からはみ出さない。したがって，求める長さは，半径４の円の周の長さであり，$2\pi\times 4=8\pi$

(4)　(3)と同じように考えて，図５の展開図上で，点Oを中心とした半径６の円の周上に点Pがあれば，２点O，Pの距離は６となる。よって，円②の周で正方形の面上にある部分(円②の実線部分)の長さの和を求めればよい。円②と辺HD，辺EAの交点をそれぞれJ，Kとする。JK＝HE＝6だから，OJ＝OK＝JK＝6より，△OJKは正三角形　したがって，∠JOK＝60°だから，$\overset{\frown}{JK}=2\pi\times 6\times\frac{60°}{360°}=2\pi$　ほかの正方形の面上の弧の長さもこれと同じになるから，求める長さは，$2\pi\times 4=8\pi$