Standard

解答と解説

PART⑧

1. (1) 12cm　(2) $3\sqrt{3}$ cm　(3) $27\sqrt{3}-9\pi$ cm^2

解説♪ (1) 図１の△OCRと△OCQにおいて，円の接線は接点を通る半径に垂直だから，∠ORC＝∠OQC＝90°　また，OR＝OQ(半径)，OC＝OC(共通)だから，直角三角形で，斜辺と他の１辺がそれぞれ等しく，△OCR≡△OCQ　よって，対応する辺は等しいから，CR＝CQ＝9　同様に，△DOR≡△DOSより，DR＝DS＝3　したがって，CD＝9＋3＝12(cm)

図１

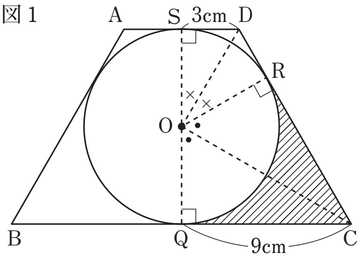
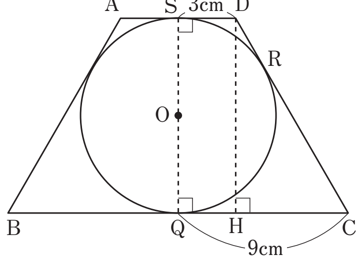


図２



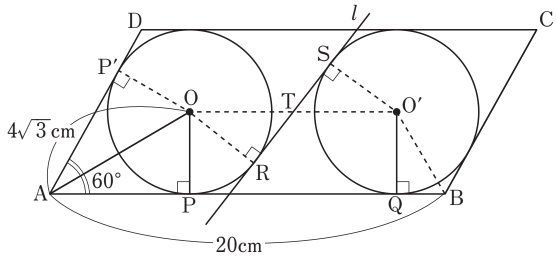
(2) 図１で，AD∥BC，OQ⊥BC，OS⊥ADより，QSは円Oの直径である。図２で，点Dから辺BCに垂線DHを引くと，四角形SQHDは長方形だから，SQ＝DH，QH＝SD＝3　よって，直角三角形DHCで，CH＝9－3＝6，CD＝12だから，三平方の定理より，DH＝$\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$　したがって，SQ＝DH＝$6\sqrt{3}$より，円Oの半径は$6\sqrt{3}\div2=3\sqrt{3}$(cm)

≪別解≫△OCR≡△OCQより，∠COR＝∠COQ，△DOR≡△DOSより，∠DOR＝∠DOSだから，∠COD＝180°÷2＝90°
△DORと△OCRにおいて，OR⊥CDだから，∠ORD＝∠CRO＝90°……①　∠DOR＋∠COR＝90°……②
△DORで，∠ORD＝90°より，∠DOR＋∠ODR＝90°……③　②，③より，∠ODR＝∠COR……④　①，④より，２組の角がそれぞれ等しいから，△DOR∽△OCRであり，OR：9＝3：ORが成り立つ。これを解くと，$OR^2=27$より，OR＝$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$(cm)

(3) 図１で，斜線部分は，四角形OQCRからおうぎ形OQRを除いたものである。また，△OCQは，∠OQC＝90°，OQ＝$3\sqrt{3}$，CQ＝9だから，OQ：CQ＝$3\sqrt{3}$：9＝1：$\sqrt{3}$より，３辺の比が1：2：$\sqrt{3}$の直角三角形で，∠COQ＝60°　よって，おうぎ形OQRの中心角は，∠QOR＝60°×2＝120°となり，斜線部分の面積は，

$$\left(\frac{1}{2}\times9\times3\sqrt{3}\right)\times2-\pi\times(3\sqrt{3})^2\times\frac{120°}{360°}=27\sqrt{3}-9\pi\ (cm^2)$$

2. (1)　$2\sqrt{3}$ cm　　(2)　12cm　　(3)　$4\sqrt{6}$ cm



解説♪　(1)　図のように，円Oと辺ADの接点をP′とする。△OAPと△OAP′において，点P，P′は円Oの接点だから∠OPA＝∠OP′A＝90°，OAは共通，OP＝OP′(半径)より，△OAP≡△OAP′　このことから，∠OAP＝∠OAP′＝60°÷2＝30°　よって，△OAPは3辺の比が1：2：$\sqrt{3}$の直角三角形だから，OP＝$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}$＝$2\sqrt{3}$ (cm)

(2)　(1)より，AP＝$2\sqrt{3}\times\sqrt{3}$＝6　また，図で，DC∥ABより，円O，円O′の直径は等しいので，その半径も等しく，O′Q＝OP＝$2\sqrt{3}$　さらに，BC∥ADより，∠ABC＝180°－60°＝120°となるから，△O′BQは，(1)と同様に考えると，∠O′QB＝90°，∠O′BQ＝120°×$\frac{1}{2}$＝60°で，3辺の比が1：2：$\sqrt{3}$の直角三角形となる。よって，BQ＝$\frac{1}{\sqrt{3}}\times 2\sqrt{3}$＝2　したがって，PQ＝20－6－2＝12 (cm)

(3)　図のように，点Oと点O′，点Oと点R，点O′と点Sを結び，直線 l と線分OO′との交点をTとする。△ORTと△O′STにおいて，∠ORT＝∠O′ST＝90°　これより，錯角が等しいからOR∥SO′となり，∠TOR＝∠TO′S　円O，円O′の半径は等しいので，OR＝O′S　よって，1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△ORT≡△O′ST　このとき，RT＝STよりRS＝2RT，OT＝O′TよりOT＝$\frac{1}{2}$OO′　また，四角形OPQO′は長方形なので，OO′＝PQ＝12より，OT＝$\frac{1}{2}\times 12$＝6　したがって，△ORTで，RT＝$\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}$＝$2\sqrt{6}$より，RS＝$2\times 2\sqrt{6}$＝$4\sqrt{6}$ (cm)