Standard

解答と解説

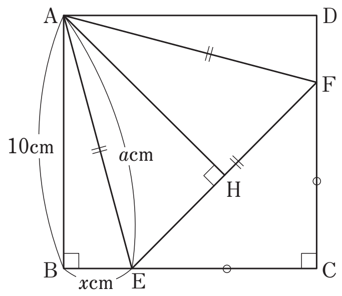
PART⑤

1. (1)　$\sqrt{x^2+100}$ cm〔$\sqrt{2}(10-x)$ cm〕

(2)　$20-10\sqrt{3}$ cm

(3)　$200\sqrt{3}-300$ cm^2

解説♪　(1)　図の△ABEで三平方の定理より，$AE=\sqrt{x^2+10^2}=\sqrt{x^2+100}$ (cm)



≪別解≫BC＝DC，BE＝DFより，CE＝CF　これと∠C＝90°より，△CFEは直角二等辺三角形となるから，$EF=\sqrt{2}EC=\sqrt{2}(10-x)$　△AEFは正三角形だから，$AE=EF=\sqrt{2}(10-x)$ (cm)

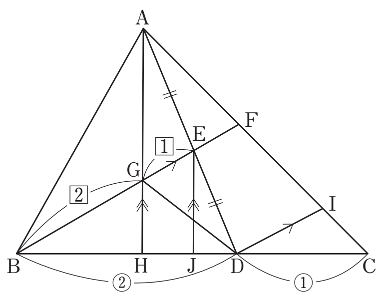
(2)　(1)とその≪別解≫より，AEの長さについて，$\sqrt{x^2+100}=\sqrt{2}(10-x)$が成り立つ。両辺を2乗してこれを解くと，$x^2+100=2(10-x)^2$より，$x=20\pm10\sqrt{3}$　$0<x<10$より，$x=20-10\sqrt{3}$ (cm)

(3)　AE＝a(cm)とおく。△AEFは正三角形だから，図のように点Aから辺EFに垂線AHを引くと，△AEHは3辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形となるので，$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$となり，$\triangle AEF=\frac{1}{2}\times EF\times AH=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$と表される。(1)，(2)より，$a^2=AE^2=x^2+100=(20-10\sqrt{3})^2+100=800-400\sqrt{3}$であるから，

$\triangle AEF=\frac{\sqrt{3}}{4}(800-400\sqrt{3})=200\sqrt{3}-300$ (cm^2)

2. (1)　$2:2:1$　　(2)　$10:5:3$　　(3)　$\frac{10}{3}$

解説♪　(1)　BF∥DIより，FI：IC＝BD：DC＝2：1　EF∥DIより，AF：FI＝AE：ED＝1：1＝2：2



よって，AF：FI：IC＝2：2：1

(2)　EF∥DIより，△AEF∽△ADIであるから，EF：DI＝AE：AD＝1：2となり，$EF=\frac{1}{2}DI$　同様に，BF∥DIより，△CBF∽△CDIだから，BF：DI＝BC：DC＝3：1となり，

BF＝3DI　よって，$BE=BF-EF=3DI-\frac{1}{2}DI=\frac{5}{2}DI$

また，BG：GE＝2：1より，$BG=\frac{2}{2+1}BE=\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}DI=\frac{5}{3}DI$，$GE=\frac{1}{2+1}BE=\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}DI=\frac{5}{6}DI$

以上より，$BG:GE:EF=\frac{5}{3}DI:\frac{5}{6}DI:\frac{1}{2}DI=10:5:3$

(3)　(2)より，$\triangle AGE : \triangle AEF = GE : EF = 5 : 3$ だから，$\triangle AGE = \frac{5}{3}\triangle AEF = \frac{5}{3} \times 2 = \frac{10}{3}$　図のように，2点G，Dを結ぶと，$\triangle GDE : \triangle AGE = DE : EA = 1 : 1$ より，$\triangle GDE = \triangle AGE = \frac{10}{3}$　$\triangle GBD : \triangle EGD = GB : EG = 2 : 1$ より，$\triangle GBD = 2\triangle EGD = 2 \times \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$　ここで，点Eを通り線分AHと平行な直線と辺BCとの交点をJとすると，$AH /\!/ EJ$ より，$HJ : JD = AE : ED = 1 : 1$，$BH : HJ = BG : GE = 2 : 1$ となるから，$BH : HD = 2 : (1+1) = 1 : 1$　よって，$\triangle GBH : \triangle GBD = BH : BD = 1 : 2$ より，$\triangle GBH = \frac{1}{2}\triangle GBD = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$