Standard

解答と解説 PART⑩

1. (1) $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$cm　(2) $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}-2\sqrt{2}$cm

解説♪ (1) 図1のように，正四面体の頂点を，それぞれO，A，B，Cとする。また，点Oから△ABCに垂線OHを引き，辺BCの中点をMとする。△OBC，△ABCはともに1辺の長さが8cmの正三角形だから，$OM=AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 8=4\sqrt{3}$　また，$\angle HMB=90^\circ$，$\angle HBM=\dfrac{1}{2}\angle ABM=\dfrac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$より，△HBMは3辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形だから，$HM=\dfrac{1}{\sqrt{3}}BM=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times 4=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　よって，△OHMで三平方の定理より，正四面体の高さは，$OH=\sqrt{OM^2-HM^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$(cm)

図1

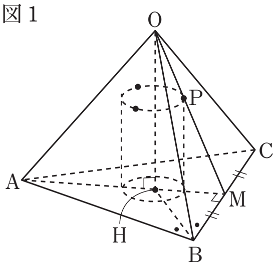
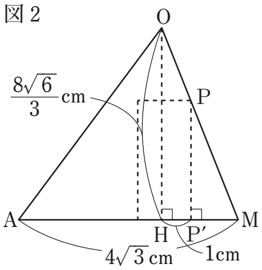


図2



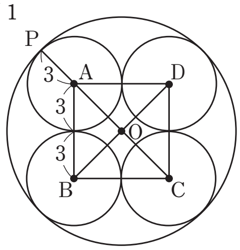
(2) 円柱と△OBCとの接点を図1のようにPとし，3点O，A，Pを通る断面を考えると，図2のようになる。円柱の下の底面の周と線分HMの交点をP′とする。△MOH∽△MPP′より，OH：PP′＝MH：MP′だから，

$\dfrac{8\sqrt{6}}{3}:PP'=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}:\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-1\right)$　これより，$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}PP'=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-1\right)$，$PP'=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}-2\sqrt{2}$(cm)

2. (1) $3+3\sqrt{2}$　(2) $36\sqrt{2}$　(3) $(270+189\sqrt{2})\pi$

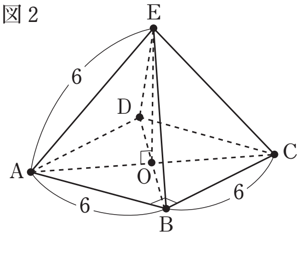
解説♪ (1) 4つの球の中心をA，B，C，Dとすると，この4点を通る断面は，図1のようになる。図1で，容器の円の中心をO，円Aと円Oの接点をPとする。四角形ABCDは正方形で，点Oはその対角線の交点だから，△ABOは直角二等辺三角形となり，$OA=\dfrac{1}{\sqrt{2}}AB=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times 6=3\sqrt{2}$　したがって，容器の底面の半径は，$OP=PA+OA=3+3\sqrt{2}$

図1



(2) (1)の球A，B，C，Dの上にのせた5個目の球の中心をEとすると，四角錐E-ABCDは，図2のような辺の長さがすべて6の正四角錐となる。このとき，線分EOは面ABCDに垂直だから，EOがこの正四角錐の高さである。△EACと△BACで，EA＝BA，EC＝BC，AC＝ACより，△EAC≡△BACであり，△BACは直角二等辺三角形だから，△EACも直角二等辺三角形　よって，$\angle EAC=45^\circ$　また，$\angle EOA=90^\circ$だから，△EAOも直角二等辺

図2



三角形であり，$\mathrm{EO}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{EA}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times 6=3\sqrt{2}$　したがって，求める正四角錐E-ABCDの体積は，$\dfrac{1}{3}\times 6^2\times 3\sqrt{2}$
$=36\sqrt{2}$

(3)　3点E，A，Cを通る平面で容器と球を切ると，切り口は図3のようになり，容器の高さは，$3+3\sqrt{2}+3=6+3\sqrt{2}$　また，容器の底面の半径は$3+3\sqrt{2}$であるから，求める容器の体積は，
$\pi\times(3+3\sqrt{2})^2\times(6+3\sqrt{2})=\pi\times\{3(1+\sqrt{2})\}^2\times 3(2+\sqrt{2})$
$=27(3+2\sqrt{2})(2+\sqrt{2})\pi=(270+189\sqrt{2})\pi$

図3