Challenge

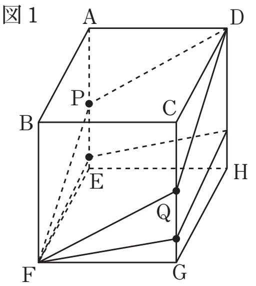
解答と解説 PART⑨

1. (1)　6秒後まで　　(2)　①　10cm　②　1008cm^3

(3)　①　2：1　②　時間…9秒後　体積…$\dfrac{2862}{5}$cm^3

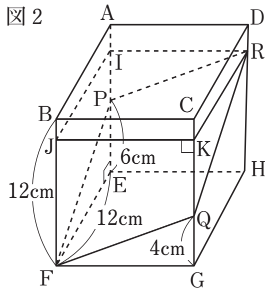
解説♪　(1)　図1のように，3点F，P，Qを通る平面が頂点Dを通るときまで，切断面は四角形である。平面が頂点Dを通るとき，△APD≡△GQFとなるから，EP＋GQ＝EP＋AP＝12となる。ここで，与えられたグラフより，出発してから6秒後，EP＝6，GQ＝6であることがわかり，このとき初めてEP＋GQ＝6＋6＝12となるので，切断面が四角形であるのは，出発してから6秒後までである。

図1



(2)①　図2のように，点Rを通り面ABCDに平行な平面と辺AE，BF，CGの交点をそれぞれI，J，Kとすると，(1)と同様，IP＝GQ　与えられたグラフより，4秒後，EP＝6，GQ＝4　よって，HR＝EI＝EP＋IP＝EP＋GQ＝6＋4＝10(cm)　　②　図2で，平面FPRQは，直方体IJKR-EFGHを合同な2つの立体に分けているから，求める頂点Bを含む方の立体の体積は，直方体ABCD-IJKRと，直方体IJKR-EFGHを半分にした立体の体積の和となる。よって，求める立体の体積は，$12^2\times(12-10)+12^2\times10\times\dfrac{1}{2}=1008$(cm^3)

図2



(3)①　与えられたグラフより，8秒後，EP＝6，GQ＝8　図3で，△QSC∽△PFEとなるから，CS：EF＝CQ：EPより，CS：12＝(12－8)：6が成り立つ。これより，6CS＝12×4，CS＝8だから，CS：SD＝8：(12－8)＝2：1　　②　CS：SD＝2：3になるのが出発してからx秒後とする。この値が大きくなるにつれて線分CSは短くなり，①より，8秒後にCS：SD＝2：1だから，CS：SD＝2：3となるのは，$8\leqq x\leqq12$のときである。与えられたグラフより，EP＝$\dfrac{3}{2}x-6$，GQ＝x

図3

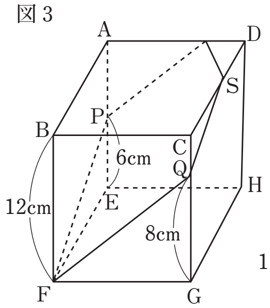
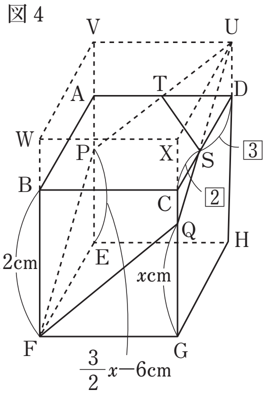


図4



△QSC∽△PFEより，CQ：EP＝CS：EF＝2：(2＋3)＝2：5となるから，$(12-x):\left(\dfrac{3}{2}x-6\right)=2:5$　これ

を解いて，$2\times\left(\frac{3}{2}x-6\right)=5\times(12-x)$，$x=9$(秒)後　ここで，頂点Bを含まない方の立体について考える。図4のように，切断面と辺ADの交点をT，辺HDの延長との交点をUとし，点Uを通り面ABCDに平行な面と辺EA，FB，GCの延長との交点をそれぞれV，W，Xとすると，頂点Bを含まない方の立体は，直方体VWXU-EFGHの半分から三角錐U-TSDを除いた立体である。△QSC∽△USDより，CQ：DU＝CS：DS＝2：3だから，$DU=\frac{3}{2}CQ=\frac{3}{2}\times(12-9)=\frac{9}{2}$　よって，直方体VWXU-EFGHの半分の体積は，$12^2\times\left(12+\frac{9}{2}\right)\times\frac{1}{2}=1188$　一方，△DUT∽△GQFより，TD：FG＝DU：GQ＝$\frac{9}{2}$：9＝1：2だから，$TD=\frac{1}{2}FG=6$　CS：SD＝2：3だから，$DS=\frac{3}{5}CD=\frac{36}{5}$　よって，三角錐U-TSDの体積は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{36}{5}\times\frac{9}{2}=\frac{162}{5}$　以上より，頂点Bを含まない方の立体の体積は，$1188-\frac{162}{5}=\frac{5778}{5}$となるから，頂点Bを含む方の立体の体積は，$12^3-\frac{5778}{5}=\frac{2862}{5}$(cm³)