Challenge

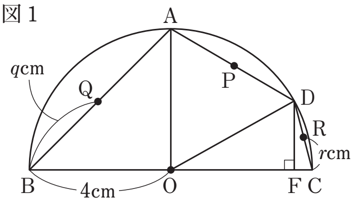
解答と解説 PART⑧

1. (1)　$\angle AOB=90^\circ$　円Rの面積…$(8-4\sqrt{3})\pi\ \mathrm{cm}^2$

(2)　$\dfrac{48}{19}\pi\ \mathrm{cm}^2$　　(3)　$\dfrac{64}{7}\pi\ \mathrm{cm}^2$

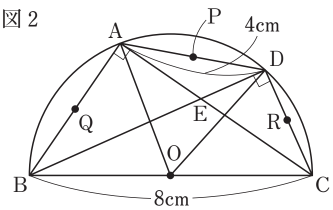
解説♪　(1)　4点B，A，D，Cを通る断面は，図1のようになる。円Qの半径を$q$cmとすると，$\pi q^2=8\pi$より，$q=2\sqrt{2}$　よって，$AB=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$だから，△OABの3辺の比は，$OA:OB:AB=4:4:4\sqrt{2}=1:1:\sqrt{2}$　したがって，△OABは直角二等辺三角形だから，$\angle AOB=90^\circ$　次に，点Dから線分OCに垂線DFを引き，円Rの半径を$r$cmとする。$AD=2\times2=4$より，$OA=OD=AD$となるから，△ODAは正三角形であり，$\angle AOD=60^\circ$だから，$\angle DOF=180^\circ-90^\circ-60^\circ=30^\circ$　これより，△DOFは3辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形となるから，$DF=\dfrac{1}{2}OD=2$，$OF=\sqrt{3}DF=2\sqrt{3}$　よって，△DFCで三平方の定理より，$(2r)^2=2^2+(4-2\sqrt{3})^2$が成り立つ。これを$r^2$について解くと，$r^2=8-4\sqrt{3}$となるから，円Rの面積は，$\pi r^2=\pi\times(8-4\sqrt{3})=(8-4\sqrt{3})\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

図1



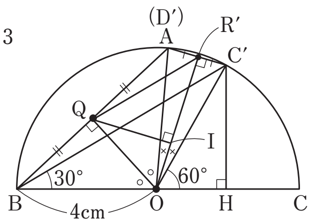
(2)　円Qと円Rの面積の比が9：4であることより，$\pi q^2:\pi r^2=9:4=3^2:2^2$だから，$q:r=3:2$　これより，$AB:DC=3:2$だから，$AB=\dfrac{3}{2}DC=\dfrac{3}{2}\times2r=3r$　また，図2のように，線分ACと線分BDの交点をEとすると，$\angle ABE=\dfrac{1}{2}\angle AOD=30^\circ$，$\angle BAC=90^\circ$より，△EABは3辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形だから，$AE=\dfrac{1}{\sqrt{3}}AB=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times3r=\sqrt{3}r$　同様に△EDCも3辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形だから，$EC=\dfrac{2}{\sqrt{3}}DC=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times2r=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}r$　よって，$AC=AE+EC=\sqrt{3}r+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}r=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}r$だから，△ABCで三平方の定理より，$(3r)^2+\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{3}r\right)^2=8^2$が成り立つ。これより，$r^2=\dfrac{48}{19}$となるから，円Rの面積は，$\pi r^2=\pi\times\dfrac{48}{19}=\dfrac{48}{19}\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

図2



(3)　線分ODが線分OAと重なるまで，△OCDを点Oを中心に反時計まわりに回転させると，図3のようになる。$OQ:OR'=OQ:OR=2:3$だから，$OQ=2t$(cm)，$OR'=3t$(cm)とおける。2点C′，Qからそれぞれ線分OC，OR′に垂線C′H，QIを引く。$\angle C'OH=60^\circ$，$\angle C'BH=30^\circ$より，△C′OH，△C′BHはとも

図3



に3辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形だから，$\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\mathrm{OC}'=2$，$\mathrm{BC}'=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{BH}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times6=4\sqrt{3}$　さらに，$\triangle\mathrm{ABC}'$で中点連結定理より，$\mathrm{QR}'=\frac{1}{2}\mathrm{BC}'=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　また，$\angle\mathrm{QOR}'=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}'=\frac{1}{2}\times120°=60°$より，$\triangle\mathrm{QOI}$も3辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形だから，$\mathrm{OI}=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}=t$，$\mathrm{QI}=\sqrt{3}\,\mathrm{OI}=\sqrt{3}\,t$，$\mathrm{IR}'=3t-t=2t$　よって，$\triangle\mathrm{QIR}'$で三平方の定理より，$(\sqrt{3}\,t)^2+(2t)^2=(2\sqrt{3})^2$が成り立ち，$t^2=\frac{12}{7}$　これより，$\triangle\mathrm{OQB}$で，$\mathrm{QB}^2=4^2-(2t)^2=16-4t^2=16-4\times\frac{12}{7}=\frac{64}{7}$となるので，円Qの面積は，$\pi\times\mathrm{QB}^2=\pi\times\frac{64}{7}=\frac{64}{7}\pi$ (cm^2)