Challenge

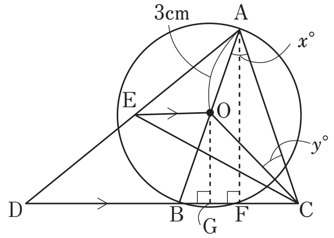
解答と解説

PART⑥

1. (1)　BD＝5cm，ED＝$\dfrac{9}{2}$cm　　(2)　$\dfrac{23\sqrt{2}}{2}$cm^2

(3)　$\left(90-\dfrac{1}{2}x-2y\right)^\circ$

解説♪　(1)　△ABCと△DACはともに二等辺三角形で，∠ACB＝∠DCAより底角が等しいので，△ABC∽△DAC　これより，BC：AC＝AC：DC　ここで，AF⊥BC，AB＝ACより，CF＝BF＝2だから，BC＝4　また，AC＝AB＝6　よって，BD＝aとすると，4：6＝6：(a＋4)，4(a＋4)＝6×6より，a＝5(cm)　次に，DA＝DC＝a＋4＝5＋4＝9　また，AO＝BO，EO∥DBより，AE＝ED　よって，ED＝$\dfrac{1}{2}$DA＝$\dfrac{1}{2}$×9＝$\dfrac{9}{2}$(cm)



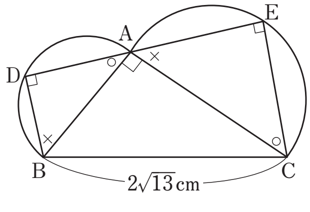
(2)　図のように，点Oから辺DCに垂線OGを引くと，OB＝3，BG＝1より，台形EOCDの高さは，OG＝$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$　また，EO＝$\dfrac{1}{2}$DB＝$\dfrac{5}{2}$　よって，求める面積は，$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{5}{2}+9\right)\times2\sqrt{2}=\dfrac{23\sqrt{2}}{2}$(cm^2)

(3)　△DECと△AOCにおいて，ED：OA＝$\dfrac{9}{2}$：3＝3：2，DC：AC＝9：6＝3：2より，ED：OA＝DC：AC　また，△DAC∽△ABCより∠EDC＝∠OAC(＝x°)　よって，2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので，△DEC∽△AOC　これより，∠DCE＝∠ACO＝y°　さらに，△DACが二等辺三角形より，∠ACD＝$(180^\circ-x^\circ)\div2=90^\circ-\dfrac{1}{2}x^\circ$　したがって，∠ECO＝$90^\circ-\dfrac{1}{2}x^\circ-y^\circ-y^\circ=\left(90-\dfrac{1}{2}x-2y\right)^\circ$

2. (1)　$\dfrac{13}{2}\pi$ cm^2　　(2)　$\dfrac{9\sqrt{3}}{5}$cm

(3)　AB＝4cm，AC＝6cm

解説♪　(1)　AB＝$2r$(cm)，AC＝$2r'$(cm)とおくと，2つの半円の面積の和は，$\dfrac{1}{2}\pi r^2+\dfrac{1}{2}\pi r'^2=\dfrac{1}{2}\pi(r^2+r'^2)$　ここで，△ABCで三平方の定理より，$(2r)^2+(2r')^2=(2\sqrt{13})^2$　これより，$r^2+r'^2$＝13となるから，2つの半円の面積の和は，$\dfrac{1}{2}\pi\times13=\dfrac{13}{2}\pi$(cm^2)



(2)　∠ADB＝∠CEA＝90°，∠DBA＝∠EACより，△ABD∽△CAEだから，BD：AE＝AB：CA　ここで，三平方の定理より，AB＝$\sqrt{3^2+4^2}$＝5，CA＝$\sqrt{(2\sqrt{13})^2-5^2}=3\sqrt{3}$　よって，3：AE＝5：$3\sqrt{3}$より，5AE＝$9\sqrt{3}$，AE＝$\dfrac{9\sqrt{3}}{5}$(cm)

(3)　△ABD∽△CAEであるから，BD$=a$(cm)，CE$=b$(cm)とおくと，$a:\frac{3}{2}=\sqrt{15}:b$より，$ab=\frac{3\sqrt{15}}{2}$，$a^2b^2=\frac{135}{4}$……①　一方，$\mathrm{AB}^2=(\sqrt{15})^2+a^2$，$\mathrm{AC}^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+b^2$で，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=(2\sqrt{13})^2$だから，$(\sqrt{15})^2+a^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+b^2=(2\sqrt{13})^2$　これより，$15+a^2+\frac{9}{4}+b^2=52$，$a^2+b^2=\frac{139}{4}$，$4a^2+4b^2=139$……②　$4a^2=X$，$4b^2=Y$とおくと，②より，$X+Y=139$……③　①より，$4a^2\times4b^2=16a^2b^2=16\times\frac{135}{4}=4\times135$だから，$XY=4\times135$……④
③より，$Y=139-X$　これを④に代入すると，$X(139-X)=4\times135$，$X^2-139X+4\times135=0$，$(X-135)(X-4)=0$より，$X=135$，4　ここで，AB＜ACより，BD＜AE，$a<\frac{3}{2}$，$2a<3$，$4a^2<9$，$X<9$だから，$X=4$　④より，$Y=135$　つまり，$4a^2=4$，$4b^2=135$だから，$a^2=1$，$b^2=\frac{135}{4}$　よって，$\mathrm{AB}=\sqrt{15+1}=4$(cm)，$\mathrm{AC}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{135}{4}}=6$(cm)