Challenge

解答と解説 PART④

1. 作図例…図1

解説♪ 求める円は図2の円Qである。このとき，円Qは点Pで$\overset{\frown}{AB}$と接することになるので，点Pにおける$\overset{\frown}{AB}$の接線は円Qの接線ともなる。また，円Qは直線lに接している(接点をRとする)ので，点Pを通る円Qの接線と直線lの交点をSとすると，△PQS≡△RQSより，∠PSQ=∠RSQとなることがわかる。したがって，まず，点Pを通り直線mに垂直な直線を引き，次に，この直線と直線lがつくる角の二等分線を引く。角の二等分線と直線mの交点が求める円の中心となるので，この交点を中心として点Pを通る円をかけばよい。

図1

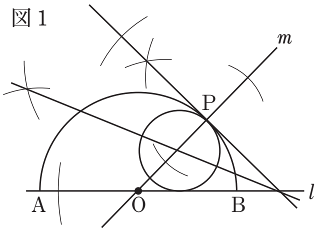
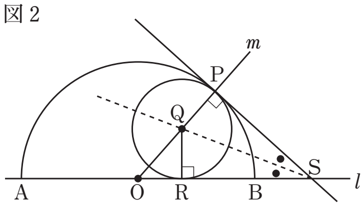
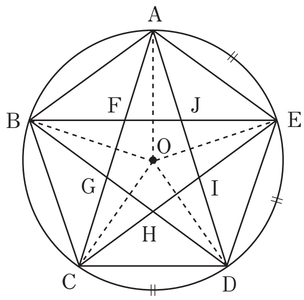


図2



2. (1) 36°　(2) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　(3) $2:(7-3\sqrt{5})$

解説♪ (1) 図のように，正五角形ABCDEの5つの頂点を通る円Oを考え，中心Oと5つの頂点を結ぶと，円周角の定理より，$\angle ICD=\dfrac{1}{2}\angle EOD=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{5}\times360^\circ\right)=36^\circ$



(2) △ACDと△CIDで，$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$より∠CAD=∠ICD，∠ADC=∠CDIだから，△ACD∽△CID　よって，AD：CD=CD：ID ……(*)　また，△ACDはAC=ADの二等辺三角形だから，△CIDも二等辺三角形であり，CI=CD=1　さらに，$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{EA}$より∠CAD=∠ECAだから，△ACIも二等辺三角形であり，AI=CI=1　したがって，AD=xとおくと，ID=AD−AI=$x-1$となり，(*)より，$x:1=1:(x-1)$が成り立つ。これを解くと，$x(x-1)=1$，$x^2-x=1$，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$，$x-\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　$x>0$より，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(3) 五角形FGHIJは正五角形となるから，五角形ABCDEと五角形FGHIJは相似である。よって，それらの面積比は相似比の2乗に等しくなる。$AD=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$JA=ID=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$だから，$IJ=AD-ID-JA=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\times2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　これより，五角形ABCDEと五角形FGHIJの相似比は，$CD:IJ=1:\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=2:(3-\sqrt{5})$だから，面積比は，$2^2:(3-\sqrt{5})^2=2:(7-3\sqrt{5})$

覚えておきたい定理・公式

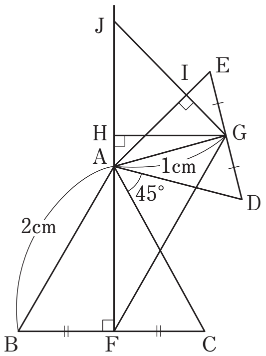
・相似比と面積比・体積比

2つの図形が相似で，相似比が$m:n$のとき，

面積比は，$m^2:n^2$

体積比は，$m^3:n^3$

3. $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}\mathrm{cm}^2$



解説♪　AF＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$AB＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$だから，点Gから直線AFに引いた垂線GHの長さがわかれば，△AFGの面積は求められる。図のように，点Gから辺AEに垂線GIを引き，直線AFとの交点をJとすると，∠IAJ＝$180°-\dfrac{1}{2}$∠BAC－∠CAD－∠DAE＝$180°-30°-45°-60°=45°$だから，△AIJはAI＝IJの直角二等辺三角形　これより，∠GJH＝∠IJA＝45°であり，さらに△GHJもGH＝HJの直角二等辺三角形となる。ここで，△AGIは3辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形より，GI＝$\dfrac{1}{2}$AG＝$\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$，AI＝$\sqrt{3}$GI＝$\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　よって，IJ＝AI＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$より，GJ＝GI＋IJ＝$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$だから，GH＝$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$GJ＝$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$　したがって，△AFG＝$\dfrac{1}{2}$×AF×GH＝$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$ (cm^2)