Challenge

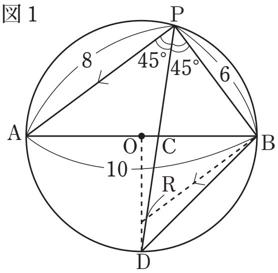
解答と解説

PART③

1. (1) ① $\dfrac{30}{7}$ ② $32:49$ (2) $5\sqrt{2}$

解説♪ (1)① 線分ABは円Oの直径より，$\angle APB=90°$ だから，三平方の定理より，$AP=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$ また，図1のように，点Bを通り辺APに平行な直線と線分PDとの交点をRとすると，$\angle BRP=\angle APR=45°$ より，△BPRは $BP=BR=6$ の直角二等辺三角形となる。ここで，△APC∽△BRCだから，$CA:CB=AP:BR=8:6=4:3$ となるので，$CB=10\times\dfrac{3}{4+3}=\dfrac{30}{7}$ ② $\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\times6\times8=24$，$CA:CB=4:3$ より，$\triangle ACP=\dfrac{4}{7}\triangle ABP=\dfrac{96}{7}$，$\triangle BCP=\dfrac{3}{7}\triangle ABP=\dfrac{72}{7}$ 一方，$\angle APD=45°$ より，$\angle AOD=45°\times2=90°$ であるから，$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\times CB\times DO=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{30}{7}\times5=\dfrac{75}{7}$ よって，$\triangle ACP:\triangle PDB=\dfrac{96}{7}:\left(\dfrac{72}{7}+\dfrac{75}{7}\right)=32:49$

図1



(2) 弦APの垂直二等分線は，点Pがどこにあっても円の中心Oを通るので，弦APの中点をM，$\overset{\frown}{AB}$の中点をEとし，図2の(ア)，(イ)のように，点Pが$\overset{\frown}{BE}$上と$\overset{\frown}{AE}$上を動く場合に分けて，∠OQDの大きさを考える。どちらの場合もMQ//PBだから，(ア)の場合，$\angle MQP=\angle BPQ=45°$ より，常に $\angle OQD=180°-45°=135°$ (イ)の場合，常に $\angle OQD=45°$ ここで，$\angle OQD=45°$ が円周角となる図3のような円Sを考えると，図2の(イ)の場合の点Qは$\overset{\frown}{OA}$上にあることがわかる。また，$\angle OSD=45°\times2=90°$ より，$\overset{\frown}{OAD}$に対する中心角は $360°-90°=270°$，円周角は $270°\times\dfrac{1}{2}=135°$ となり，図2の(ア)の場合の点Qは$\overset{\frown}{OD}$上にあることがわかる。よって，点Qは図3の円Sの円周上を動く。△OADは直角二等辺三角形であるから，求める円の直径は，$AD=\sqrt{2}\,OA=5\sqrt{2}$

図2

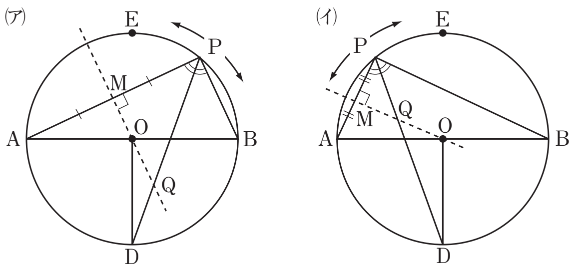
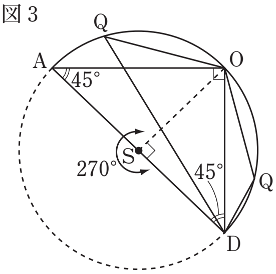


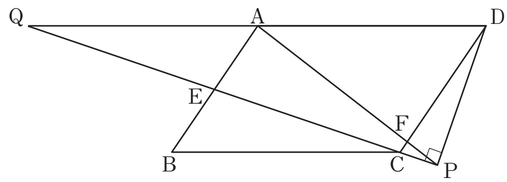
図3



2. (1)　7：2　　(2)　$\dfrac{11}{36}S$

(3)　(例) DAとPEの延長の交点をQとする。△EAQと△EBCにおいて，仮定より，EA＝EB　対頂角より，∠AEQ＝∠BEC　QD∥BCの錯角より，∠EAQ＝∠EBC　よって，1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△EAQ≡△EBC

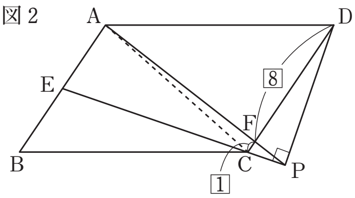
図1



合同な図形の対応する辺より，AQ＝BC　また，平行四辺形の対辺より，AD＝BCだから，AQ＝AD　点Aは直角三角形QDPの斜辺QDの中点だから，AQ＝AD＝APとなる。したがって，AD＝AP (図1参照)

解説♪　(1)　AB∥DCより，△AEP∽△FCPとなるから，AP：FP＝AE：FC　ここで，AE＝$\frac{1}{2}$AB＝$\frac{1}{2}$DC，CF：FD＝1：8よりFC＝$\frac{1}{9}$DC　よって，AP：FP＝$\frac{1}{2}$DC：$\frac{1}{9}$DC＝9：2となるから，AF：FP＝7：2

図2



(2)　図2のように，線分ACで台形AECFを2つの三角形△AEC，△ACFに分ける。AE＝EBより，△AEC＝$\frac{1}{2}$△ABC＝$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}S=\frac{1}{4}S$　CF：FD＝1：8より，△ACF＝$\frac{1}{9}$△ACD＝$\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}S=\frac{1}{18}S$　よって，台形AECFの面積は，$\frac{1}{4}S+\frac{1}{18}S=\frac{11}{36}S$