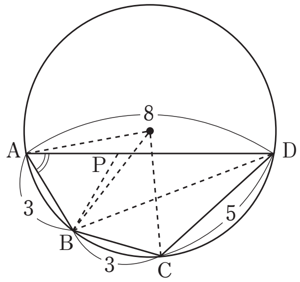
Challenge

解答と解説 PART②

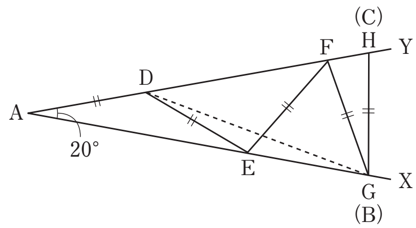
1. 60°

解説♪ 図のように，辺AD上に$AP=AB=3$となる点Pをとると，$PD=8-3=5$となる。△PBDと△CBDにおいて，$PD=CD=5$，辺BDが共通　また，$AB=BC$より$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$で，等しい弧に対する中心角は等しく，円周角はその$\dfrac{1}{2}$だから等しくなり，$\angle PDB=\angle CDB$　以上より，2辺とその間の角がそれぞれ等しいから，$\triangle PBD\equiv\triangle CBD$　これより，$BP=BC=3$となるから，△ABPは1辺3の正三角形であり，$\angle A=60°$



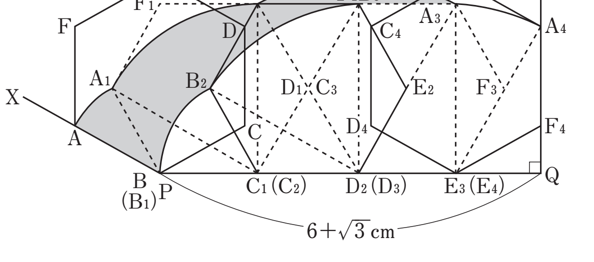
2. 10°

解説♪ 図のように，半直線AX，AY上に，$AD=DE=EF=FG=GH$となるように点E～Hをとる。このとき，二等辺三角形の底角が等しいこと，および，三角形の内角と外角の関係から，$\angle DEA=\angle DAE=20°$，$\angle EFD=\angle EDF=20°+20°=40°$，$\angle FGE=\angle FEG=40°+20°=60°$，$\angle GHF=\angle GFH=60°+20°=80°$　よって，△AGHで，$\angle AGH=180°-80°-20°=80°$となるので，$\angle AGH=\angle AHG=80°$より，$AG=AH$　したがって，点G，点Hがそれぞれ頂点B，頂点Cに対応することになる。ここで，$\angle FGE=\angle FEG=60°$より△EFGは正三角形となるから，$EG=EF$　また，$DE=EF$だから，△EDGは$ED=EG$の二等辺三角形で，$\angle DEG=180°-20°=160°$より，求める角の大きさは，$\angle ABD=\angle EGD=(180°-160°)\div2=10°$



3. (1) $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}\pi$ cm　(2) $\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}\pi$ cm　(3) $\dfrac{7}{3}\pi$ cm^2

解説♪ (1) まず，正六角形は点Bを中心として回転し，図の正六角形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$の位置まで移動する。このとき，$AB=2$，回転角が$\angle ABA_1=\angle XPQ-\angle A_1B_1C_1=150°-120°=30°$より，$\overset{\frown}{AA_1}=2\pi\times2\times\dfrac{30°}{360°}=\dfrac{1}{3}\pi$



次に，正六角形は点Cを中心として回転し，正六角形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$の位置まで移動する。このとき，$A_1C_1=AC=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$，回転角が

$\angle A_1C_1A_2=\angle B_1C_1B_2=180^\circ-120^\circ=60^\circ$より，$\overset{\frown}{A_1A_2}=2\pi\times2\sqrt{3}\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　よって，求める距離は，

$\overset{\frown}{AA_1}+\overset{\frown}{A_1A_2}=\dfrac{1}{3}\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi=\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}\pi$ (cm)

(2)　(1)の状態(正六角形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$)からは，まず，点Dを中心として回転し，図の正六角形$A_3B_3C_3D_3E_3F_3$の位置まで移動する。このとき，$A_2D_2=4$，回転角が$\angle A_2D_2A_3=60^\circ$より，$\overset{\frown}{A_2A_3}=2\pi\times4\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}=\dfrac{4}{3}\pi$　次に，点Eを中心として回転する。$EF=2$，$E_3Q=(6+\sqrt{3})-2\times3=\sqrt{3}$，$\angle PQY=90^\circ$より，点Fが直線QYに接する($F_4$)と，図の$\triangle E_3F_4Q$は3辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形となるので，$\angle E_3F_4Q=60^\circ$　これより，辺AFが直線QYに重なることがわかるので，このとき，正六角形$A_4B_4C_4D_4E_4F_4$の位置まで移動する。$A_3E_3=2\sqrt{3}$，回転角が$\angle A_3E_3A_4=30^\circ$より，$\overset{\frown}{A_3A_4}=2\pi\times2\sqrt{3}\times\dfrac{30^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　よって，求める距離は，$\overset{\frown}{A_2A_3}+\overset{\frown}{A_3A_4}=\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi=\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}\pi$ (cm)

(3)　辺ABが通過する部分は，図で影を付けた部分である。1回目の移動では，おうぎ形BAA_1が描かれ，その面積は，$\pi\times2^2\times\dfrac{30^\circ}{360^\circ}=\dfrac{1}{3}\pi$　2回目の移動では，図形$A_1B_1B_2A_2$が描かれ，その面積は，$\triangle B_1A_1C_1$+〔おうぎ形$C_1A_1A_2$〕－〔おうぎ形$C_1B_1B_2$〕$-\triangle B_2A_2C_2$で求められる。ここで，$\triangle B_1A_1C_1\equiv\triangle B_2A_2C_2$だから，〔図形$A_1B_1B_2A_2$〕$=\pi\times(2\sqrt{3})^2\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}-\pi\times2^2\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}=\dfrac{4}{3}\pi$　3回目の移動では，図形$A_2B_2B_3A_3$が描かれ，その面積は，$\triangle B_2A_2D_2$+〔おうぎ形$D_2A_2A_3$〕－〔おうぎ形$D_2B_2B_3$〕$-\triangle B_3A_3D_3$で求められる。ここで，$\triangle B_2A_2D_2\equiv\triangle B_3A_3D_3$だから，〔図形$A_2B_2B_3A_3$〕$=\pi\times4^2\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}-\pi\times(2\sqrt{3})^2\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}=\dfrac{2}{3}\pi$　よって，求める面積は，$\dfrac{1}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{7}{3}\pi$ (cm²)