

数学解答

1 (1) ① 72000 ② -3

(2) ① $x=0, -\frac{5}{3}$

② $x=-3-\sqrt{3}, 5-\sqrt{3}$

(3) ① 49, 287

② 7, 41, 49, 287

2 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$

3 (1) $PX=5\text{ cm}, QY=2\text{ cm}$

(2) 13:21

4 (1) $B(-a, a), C(2a, 4a)$

(2) $\triangle OBC$ の面積 $\cdots \frac{3}{4} a=\frac{1}{2}$

(3) $D(1+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}), b=\frac{1}{2}$

5 (1) $\frac{56\sqrt{3}}{3}\pi\text{cm}^3$ (2) 問題削除

6 (1) 円Oの半径 $\cdots \frac{7\sqrt{3}}{3}$ $CP=\frac{7\sqrt{6}}{3}$

(2) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

1 [独立小問集合題]

(1)<数の計算, 平方根の計算>①与式 $=(2009+1991)(2009-1991)=4000\times 18=72000$ ②与式 $=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}+6\times\frac{1-5}{4}+\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+6\times(-1)+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-6+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=-3$

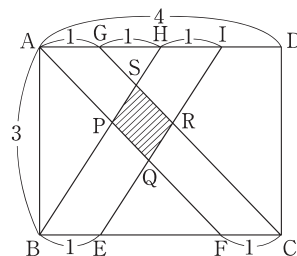
(2)<二次方程式>① $2x^2-x=5x^2+4x, -3x^2-5x=0, x^2+\frac{5}{3}x=0, x(x+\frac{5}{3})=0 \therefore x=0, -\frac{5}{3}$

② $(\sqrt{2}x+\sqrt{6})^2=\{\sqrt{2}(x+\sqrt{3})\}^2=(\sqrt{2})^2(x+\sqrt{3})^2=2(x+\sqrt{3})^2$ となるので, 方程式は, $2(x+\sqrt{3})^2-4(x+\sqrt{3})-30=0$ となる。ここで, $x+\sqrt{3}=A$ とおくと, $2A^2-4A-30=0, A^2-2A-15=0, (A+3)(A-5)=0$ より, $A=-3, 5$ となるので, $x+\sqrt{3}=-3$ より $x=-3-\sqrt{3}$, $x+\sqrt{3}=5$ より $x=5-\sqrt{3}$ である。

(3)<整数の性質>①2009を素因数分解すると, $2009=7^2\times 41$ となるので, 2009を自然数 n でわってその商が素数となると, 商は7か41である。商が7のとき $n=7\times 41=287$, 商が41のとき $n=7^2=49$ だから, 求める自然数 n は49, 287である。 ②3つの数1858, 3867, 5876を自然数 n でわったときの商をそれぞれ a, b, c (a, b, c は自然数)とし, 余りを r とすると, $1858=an+r\cdots\cdots$ (i), $3867=bn+r\cdots\cdots$ (ii), $5876=cn+r\cdots\cdots$ (iii)と表せる。このとき, $a<b<c$ である。(ii)-(i)より, $3867-1858=bn-an, 2009=(b-a)n$ となり, $b-a, n$ は自然数だから, n は2009の約数である。また,(iii)-(ii)より, $2009=(c-b)n$ となるので, 同様に, n は2009の約数である。ここで, ①より $2009=7^2\times 41$ だから, 2009の約数は, 1, 7, 41, $7^2=49, 7\times 41=287, 7^2\times 41=2009$ である。問題の条件より, $n\neq 1$ であり, $n=2009$ のとき,(i)より $a=0$ となり, 商が自然数にならないので, 求める自然数 n は, 7, 41, 49, 287である。

2 [独立小問集合題]

(1)<図形—面積—平行線と線分の比>右図のように, 斜線部分の四角形をPQRSとする。まず, $AG\parallel FC, AG=FC$ より, 四角形AFCGは平行四辺形だから, $AF\parallel GC$ であり, 同様に, $HI\parallel BE, HI=BE$ より, 四角形HBEIは平行四辺形だから, $HB\parallel IE$ である。よって, 四角形PQRSは平行四辺形である。ここで, 平行四辺形PQRS, 平行四辺形HBEIの底辺をそれぞれ線分PS, BHと見ると, この2つの平行四辺形は高さが等しいので, [平行四辺形PQRS]:[平行四辺形HBEI]=PS:BHである。 $AF\parallel GC$ よ

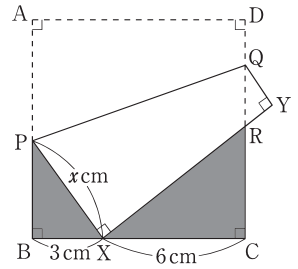


り、 $BP:PS=BF:FC=(4-1):1=3:1$ 、 $PS:SH=AG:GH=1:1$ であり、これより、 $BP:PS:SH=3:1:1$ となるから、 $PS:BH=1:(3+1+1)=1:5$ となる。したがって、 $[\text{平行四辺形PQRS}]:[\text{平行四辺形HBEI}]=1:5$ となるので、 $[\text{平行四辺形PQRS}]=\frac{1}{5}[\text{平行四辺形HBEI}]=\frac{1}{5}\times BE\times AB=\frac{1}{5}\times 1\times 3=\frac{3}{5}$ である。

(2)＜確率―色球＞1回目は、白球6個、赤球4個の計10個の球の中から1個の球を取り出すので、その取り出し方は10通りあり、2回目は、1回目に取り出した球の色にかかわらず1個を加えた計11個の球の中から1個の球を取り出すことになるので、11通りの取り出し方がある。よって、球の取り出し方は、全部で、 $10\times 11=110$ (通り)ある。このうち、2回目に赤球を取り出す場合は、1回目に白球、2回目に赤球を取り出す場合と、1回目、2回目ともに赤球を取り出す場合である。1回目に白球、2回目に赤球を取り出す場合、2回目は白球1個が加わり、袋の中は白球7個、赤球4個となるので、1回目は白球6個の中から、2回目は赤球4個の中から取り出すことになり、取り出し方は $6\times 4=24$ (通り)となる。また、1回目、2回目ともに赤球を取り出す場合、2回目は赤球が1個加わり、袋の中は白球6個、赤球5個となるので、1回目は赤球4個の中から、2回目は赤球5個の中から取り出すことになり、取り出し方は $4\times 5=20$ (通り)となる。したがって、2回目に赤球を取り出す場合は $24+20=44$ (通り)となるので、その確率は $\frac{44}{110}=\frac{2}{5}$ である。

③ [平面図形―正方形]

(1)＜長さ―三平方の定理、相似＞右図で、 $PX=x$ (cm)とすると、折り返した図形より、 $PA=PX=x$ となるので、 $PB=AB-PA=BC-PA=(3+6)-x=9-x$ となる。よって、 $\triangle PBX$ で三平方の定理より、 $PX^2=PB^2+BX^2$ なので、 $x^2=(9-x)^2+3^2$ が成り立ち、 $x^2=81-18x+x^2+9$ 、 $18x=90$ 、 $x=5$ 、つまり $PX=5$ (cm)となる。このとき、 $PB=9-5=4$ である。また、 $\triangle PBX$ と $\triangle XCR$ において、 $\angle B=\angle C=90^\circ$ であり、 $\triangle PBX$ で $\angle BPX=90^\circ-\angle PXB$ 、 $\angle PXY=\angle PAD=90^\circ$ より $\angle CXR=90^\circ-\angle PXB$ と表せるので、 $\angle BPX=\angle CXR$ である。よって、2組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle PBX\sim\triangle XCR$ であり、相似比は $PB:XC=4:6=2:3$ だから、 $CR=\frac{3}{2}BX=\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{2}$ 、 $XR=\frac{3}{2}PX=\frac{3}{2}\times 5=\frac{15}{2}$ となり、さらに $XY=AD=BC=9$ だから、 $YR=XY-XR=9-\frac{15}{2}=\frac{3}{2}$ となる。次に、 $\triangle XCR$ と $\triangle QYR$ において、 $\angle Y=\angle D=90^\circ$ より $\angle C=\angle Y$ であり、 $\angle XRC=\angle QRY$ だから、 $\triangle XCR\sim\triangle QYR$ である。これより、 $XC:QY=CR:YR$ が成り立つので、 $6:QY=\frac{9}{2}:\frac{3}{2}$ より、 $QY\times\frac{9}{2}=6\times\frac{3}{2}$ 、 $QY=2$ (cm)となる。



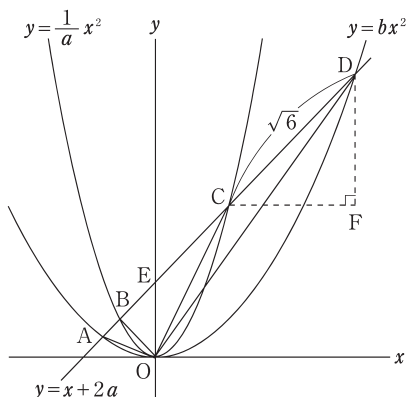
(2)＜面積比＞右上図で、赤色部分は $\triangle PBX$ と $\triangle XCR$ で、その面積は、 $\triangle PBX+\triangle XCR=\frac{1}{2}\times 3\times 4+\frac{1}{2}\times 6\times\frac{9}{2}=\frac{39}{2}$ である。また、白色部分は台形 $PXYQ$ で、高さは $XY=9$ だから、面積は、 $\frac{1}{2}\times (2+5)\times 9=\frac{63}{2}$ である。よって、求める面積比は、 $\frac{39}{2}:\frac{63}{2}=13:21$ となる。

④ [関数―関数 $y=ax^2$ と直線]

(1)＜交点の座標＞次ページの図で、2点B、Cは、放物線 $y=\frac{1}{a}x^2$ と直線 $y=x+2a$ の交点なので、 $\frac{1}{a}x^2=x+2a$ 、 $x^2=ax+2a^2$ 、 $x^2-ax-2a^2=0$ 、 $(x+a)(x-2a)=0$ $\therefore x=-a$ 、 $2a$ ここで、 $\frac{1}{a}>0$ より $a>0$ だから、 $-a<2a$ である。よって、点Bの x 座標は $-a$ 、点Cの x 座標は $2a$ だから、 $y=$

$\frac{1}{a} \times (-a)^2 = a$ より, $B(-a, a)$ であり, $y = \frac{1}{a} \times (2a)^2 = 4a$ より, $C(2a, 4a)$ である。

- (2) <面積, a の値> 右図において, $AD : BC = 4 : \sqrt{3}$ より $\triangle OAD : \triangle OBC = 4 : \sqrt{3}$ で, $\triangle OAD$ の面積が $\sqrt{3}$ だから, $\triangle OBC = \frac{\sqrt{3}}{4} \triangle OAD = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3} = \frac{3}{4}$ である。また, 直線 $y = x + 2a$ と y 軸の交点を E とすると, 直線の切片より $OE = 2a$ で, $\triangle OBE$, $\triangle OCE$ の底辺を OE と見ると, 2点 B , C の x 座標より, $\triangle OBE$ の高さは a , $\triangle OCE$ の高さは $2a$ である。よって, $\triangle OBC = \triangle OBE + \triangle OCE = \frac{1}{2} \times 2a \times a + \frac{1}{2} \times 2a \times 2a = 3a^2$ と表せるので, $\triangle OBC$ の面積について, $3a^2 = \frac{3}{4}$ が成り立ち, $a^2 = \frac{1}{4}$, $a = \pm \frac{1}{2}$ となる。 $a > 0$ だから, $a = \frac{1}{2}$ である。

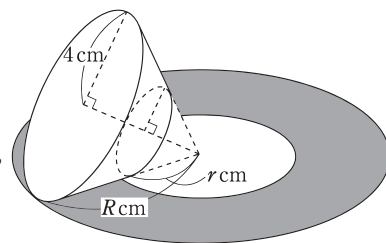


- (3) <座標, 比例定数> 右上图で, まず, (1)より $C(2a, 4a)$ と表せ, (2)より $a = \frac{1}{2}$ だから, $2a = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, $4a = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ より, $C(1, 2)$ である。次に, 点 C を通り x 軸に平行な直線と点 D を通り y 軸に平行な直線の交点を F とすると, 2点 C , D を通る直線の傾きが 1 より, $CF = DF$ だから, $\triangle CDF$ は直角二等辺三角形である。また, $CD = \sqrt{6}$ なので, $CF = DF = \frac{1}{\sqrt{2}} CD = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{6} = \sqrt{3}$ となり, 点 D の x 座標は $1 + \sqrt{3}$, y 座標は $2 + \sqrt{3}$ である。よって, $D(1 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ である。点 D は放物線 $y = bx^2$ 上にあるので, $2 + \sqrt{3} = b(1 + \sqrt{3})^2$, $2 + \sqrt{3} = b(4 + 2\sqrt{3})$, $2 + \sqrt{3} = b \times 2(2 + \sqrt{3})$ より, $b = \frac{1}{2}$ となる。

5 [空間図形—円錐台]

《基本方針の決定》(1) 外円の周の長さがわかる。

- (1) <体積—三平方の定理> 右図で, 円錐台がもとの場所にかえるまでにちょうど 2 回転したことから, 外円の周の長さは, 円錐台の大きい方の底面の周の長さの 2 倍である。よって, 外円の半径を R cm とすると, $2\pi R = 2\pi \times 4 \times 2$ が成り立ち, これより, 外円の半径は $R = 8$ (cm) となる。また, 内円の半径を r cm とすると, 内円と外円で囲まれたリング形の部分の面積が $48\pi \text{ cm}^2$ であることより, $\pi \times 8^2 - \pi r^2 = 48\pi$ が成り立つ。これを解くと, $r^2 = 16$ で, $0 < r < 8$ より, $r = 4$ となり, 内円の半径は $r = 4$ (cm) である。さらに, 円錐台の小さい方の底面の半径を x cm とすると, 内円の周の長さについて, $2\pi x \times 2 = 2\pi \times 4$ となり, $x = 2$ である。ここで, 外円の半径, 内円の半径は, それぞれ, 円錐台をつくるもとの円錐の母線の長さ, 取り除いた円錐の母線の長さを表すので, 三平方の定理より, もとの円錐の高さは $\sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$, 取り除いた円錐の高さは $\sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ となる。したがって, 円錐台の体積は, $\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 4\sqrt{3} - \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 2\sqrt{3} = \frac{56\sqrt{3}}{3} \pi$ (cm³) である。

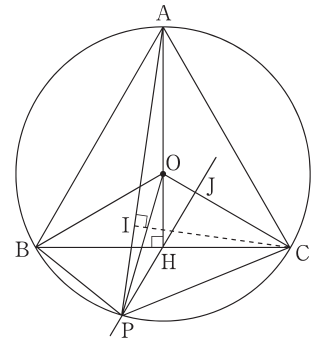


(2) 問題削除

6 [平面図形—円と三角形]

《基本方針の決定》(1) $\triangle OBC$, $\triangle OPC$ に着目する。 (2) 線分BCの中点と点Aと点Bを結んでできる三角形の面積は $\triangle ABC$ の面積の半分である。

(1) <長さ—特別な直角三角形> 右図のように、中心Oと点B、点Cをそれぞれ結ぶと、 $\widehat{BAC}$ に対する円周角と中心角の関係より、 $\widehat{BAC}$ に対する中心角の大きさが $2\angle BPC = 2 \times 120^\circ = 240^\circ$ となるので、 $\angle BOC = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$ である。また、 $OB = OC$ だから、中心Oから線分BCに垂線OHを引くと、 $BH = CH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 7 = \frac{7}{2}$ 、 $\angle BOH = \angle COH = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$ となる。よって、 $\triangle OBH$ は3辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形だから、円Oの半径は $OB = \frac{2}{\sqrt{3}}BH = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{7}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ となる。次に、 $\widehat{BC}$ に対する円周角と中心角の関係より



り $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$ だから、 $\angle BAP = 15^\circ$ のとき、 $\angle PAC = \angle BAC - \angle BAP = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$ となり、中心Oと点Pを結ぶと、 $\widehat{PC}$ に対する円周角と中心角の関係より、 $\angle POC = 2\angle PAC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ となる。よって、 $\triangle OPC$ は直角二等辺三角形だから、 $CP = \sqrt{2}OC = \sqrt{2}OB = \sqrt{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{6}}{3}$ である。

《別解(CPの長さ)》 右上図で、 $\angle BAC = 60^\circ$ 、 $\angle BAP = 15^\circ$ より、 $\angle PAC = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$ である。また、 $AB = BC$ より $\angle BCA = \angle BAC = 60^\circ$ だから、 $\angle ABC = 180^\circ - 60^\circ \times 2 = 60^\circ$ となり、 $\angle APC = \angle ABC = 60^\circ$ である。さらに、 $\triangle ABC$ は正三角形となるので、 $AC = BC = 7$ である。したがって、点Cから線分APに垂線CIを引くと、 $\triangle ACI$ が直角二等辺三角形になることから、 $CI = \frac{1}{\sqrt{2}}AC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 7 = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ となり、 $\triangle CIP$ は3辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形になることから、 $CP = \frac{2}{\sqrt{3}}CI = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{3}$ となる。

(2) <長さ—相似> 右上図で、点Hは線分BCの中点だから、点Aと点Hを結ぶと、 $\triangle ABH = \frac{1}{2}\triangle ABC$ である。よって、 $\triangle ABP = \frac{1}{2}\triangle ABC$ のとき、 $\triangle ABH = \triangle ABP$ となるので、 $AB \parallel HP$ である。また、(1)の別解より $\angle ABH = 60^\circ$ であるから、 $\angle BHP = \angle ABH = 60^\circ$ となり、 $\angle PHC = 180^\circ - \angle BHP = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ である。ここで、 $\triangle PHC$ と $\triangle BPC$ において、 $\angle PHC = \angle BPC = 120^\circ$ 、 $\angle PCH = \angle BCP$ より、 $\triangle PHC \sim \triangle BPC$ となるから、 $CP:CB = CH:CP$ より、 $CP:7 = \frac{7}{2}:CP$ が成り立ち、 $CP^2 = 7 \times \frac{7}{2}$ 、 $CP = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ となる。

《別解》 右上図で、2点P、Hを通る直線と線分OCの交点をJとする。 $\triangle ABH = \triangle ABP$ より $AB \parallel HP$ だから、 $\angle JHC = \angle ABC = 60^\circ$ であり、 $\triangle OHC$ の内角より、 $\angle JCH = 180^\circ - \angle OHC - \angle COH = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ となるから、 $\triangle JHC$ は3辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である。これより、 $CJ = \frac{\sqrt{3}}{2}CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ となり、 $OJ = OC - CJ = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{4} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$ となる。また、 $PJ \perp OC$ 、 $OP = OC = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ だから、 $\triangle OPJ$ で三平方の定理より、 $PJ^2 = OP^2 - OJ^2 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{7\sqrt{3}}{12}\right)^2$ となり、 $\triangle JPC$ で三平方の定理より、 $CP = \sqrt{CJ^2 + PJ^2} = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{7\sqrt{3}}{12}\right)^2} = \sqrt{(7\sqrt{3})^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 \right\}} = \sqrt{(7\sqrt{3})^2 \times \frac{1}{6}} = 7\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ となる。